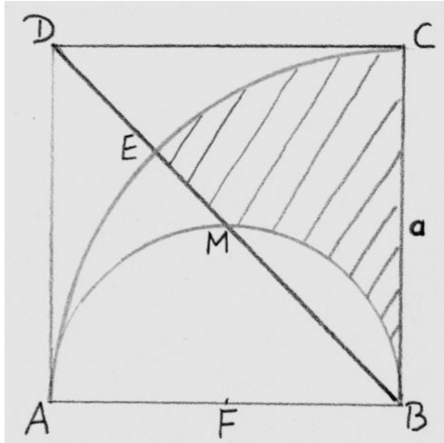
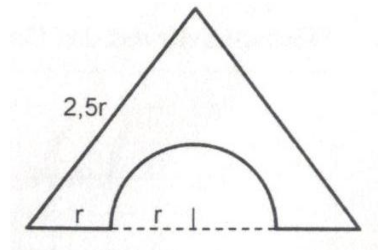
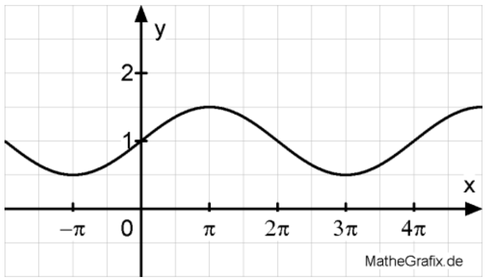
CJT-Gymnasium Lauf ❐ Grundwissen (& Aufgaben) Jahrgangsstufe 10 (7/2009)

Wissen / Können	**Beispiele**
1. Kreis und Kugel	
Für einen Kreissektor mit Radius r und Mittelpunktswinkel α gilt: • Länge des **Kreisbogens** $b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot r$ • Flächeninhalt des **Kreissektors** $A = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi \cdot r^2$ • Zusammenhang zwischen **Gradmaß und Bogenmaß**: $\frac{\alpha \text{ im Bogenmaß}}{2\pi} = \frac{\alpha \text{ im Gradmaß}}{360°}$	*Bestimmen Sie Inhalt und Umfang der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von a.*  $A = \frac{1}{2} A_{Viertelkreis\ um\ B} - A_{Segment} =$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a^2 - \left(A_{Viertelkreis\ um\ F} - A_{Dreieck\ FBM}\right) =$ $= \frac{1}{8}\pi a^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{8}\pi a^2 - \left(\frac{1}{16}\pi a^2 - \frac{1}{8}a^2\right) =$ $= \frac{1}{8}\pi a^2 - \frac{1}{16}\pi a^2 + \frac{1}{8}a^2 = \frac{1}{16}\pi a^2 + \frac{1}{8}a^2 = \frac{1}{16}a^2 \cdot (\pi + 2)$ $U = \overline{BC} + b_{CE} + \overline{EM} + b_{MB} = a + \frac{1}{8} \cdot 2\pi \cdot a + \left(a - \overline{MB}\right) + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{a}{2} =$ $= a + \frac{1}{4}\pi a + a - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{4}\pi a = 2a + \frac{1}{2}\pi a - \sqrt{\frac{a^2}{2}} = 2a + \frac{1}{2}\pi a - \frac{1}{2}a\sqrt{2} = a \cdot \left(2 + \frac{\pi - \sqrt{2}}{2}\right)$
Für eine **Kugel** mit Radius r gilt: • **Volumen** $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ • **Oberfläche** $O = 4\pi \cdot r^2$	*Die Skizze zeigt den Querschnitt eines Kegels, aus dem eine Halbkugel herausgefräst wurde.* *Bestimmen Sie das Volumen V und die Oberfläche O des Körpers in Abhängigkeit von r.*  $V = V_{Kegel} - V_{Halbkugel} = \frac{1}{3}\pi \cdot r_{Kegel}^2 \cdot h_{Kegel} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r_{Kugel}^3 =$ $= \frac{1}{3}\pi \cdot (2r)^2 \sqrt{(2{,}5r)^2 - (2r)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{1}{3} \cdot 4\pi r^2 \cdot 1{,}5r - \frac{2}{3}\pi \cdot r^3 = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$ $O = M_{Kegel} + O_{Halbkugel} + A_{Kreisring} = \pi \cdot r_{Kegel} \cdot m_{Kegel} + \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot r_{Kugel}^2 + A_{großerKreis} - A_{kleinerKreis} =$ $= \pi \cdot 2r \cdot 2{,}5r + 2\pi \cdot r^2 + \pi \cdot (2r)^2 - \pi \cdot r^2 = 5\pi r^2 + 2\pi r^2 + 4\pi r^2 - \pi r^2 = 10\pi r^2$

2. Geometrische und funktionale Aspekte der Trigonometrie

Ist $P(x/y)$ ein beliebiger Punkt auf dem Einheitskreis und α der Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Halbgeraden vom Ursprung aus durch P, so legt man fest: $\sin\alpha = y\ ;\ \cos\alpha = x$. Die Sinus- und Kosinuswerte haben für den spitzen Winkel α sowie für $180° - \alpha$, $180° + \alpha$ und $360° - \alpha$ den gleichen Betrag.	*Bestimmen Sie alle Winkel im Grad- und Bogenmaß, für die gilt:* *a)* $\sin\alpha = -0{,}6088$ *und* $\alpha \in [0°; 360°[$ [→ $\sin\alpha' = 0{,}6088 \Rightarrow \alpha' \approx 37{,}5° \Rightarrow \alpha_1 = 180° + \alpha' \approx 217{,}5°;\ \alpha_2 = 360° - \alpha' \approx 322{,}5°;$ *im Bogenmaß:* $\alpha_1 = \frac{217{,}5°}{360°}\cdot 2\pi = \frac{29}{24}\cdot\pi \approx 3{,}80;\ \alpha_2 = \frac{322{,}5°}{360°}\cdot 2\pi = \frac{43}{24}\cdot\pi \approx 5{,}63$] *b)* $\cos\beta = 0{,}9309$ *und* $\beta \in [0°; 360°[$ [→ $\beta_1 \approx 21{,}4°\ ;\ \beta_2 = 360° - \beta_1 \approx 338{,}6°;$ *im Bogenmaß:* $\beta_1 = \frac{21{,}4°}{360°}\cdot 2\pi = \frac{107}{900}\cdot\pi \approx 0{,}37;\ \beta_2 = \frac{338{,}6°}{360°}\cdot 2\pi = \frac{1693}{900}\cdot\pi \approx 5{,}91$]
Durch die Festsetzungen $\sin(x + k\cdot 2\pi) = \sin x$ und $\cos(x + k\cdot 2\pi) = \cos x$ für alle $x \in [0; 2\pi[$ und $k \in \mathbf{Z}$ sind **Sinus-** und **Kosinusfunktion** für alle reellen Zahlen definiert. Die beiden Funktionen sind periodisch mit der **Periode** 2π .	*Geben Sie auf zwei Nachkommastellen genau alle Zahlen* $x \in \mathbf{R}$ *an, für die* $\cos x = 0{,}9211$ *gilt.* [→ $x_1 \approx 0{,}40 \Rightarrow x_2 = 2\pi - x_1 \approx 5{,}88;$ $\Rightarrow$ *(Periode 2π)* $x \approx 0{,}40 + k\cdot 2\pi$ *mit* $k \in \mathbf{Z}$ *oder* $x \approx 5{,}88 + k\cdot 2\pi$ *mit* $k \in \mathbf{Z}$]
Die **allgemeine Sinusfunktion** lässt sich durch $f: x \mapsto a\cdot\sin[b\cdot(x+c)] + d;\ x \in \mathbf{R}$ mit $a \neq 0, b > 0;\ c, d \in \mathbf{R}$ beschreiben. Einfluss der Parameter auf den Graphen: ▪ Strecken bzw. Stauchen in y-Richtung mit dem Faktor $\lvert a\rvert$ („Amplitude“) ▪ Strecken bzw. Stauchen in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ („Periode“ $\frac{2\pi}{b}$) ▪ Verschiebung in x-Richtung um $\lvert c\rvert$ ▪ Verschiebung in y-Richtung um $\lvert d\rvert$	*Bestimmen Sie Amplitude, Periode und Verschiebung der Funktion* $f: x \mapsto \frac{3}{2}\cdot\sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right);\ D_f = \mathbf{R}$. [→ *Amplitude* $a = \frac{3}{2}$, *Periode* $\frac{2\pi}{2} = \pi$, *Verschiebung um* $\frac{2}{3}\pi : 2 = \frac{\pi}{3}$ *nach rechts, keinerlei Verschiebung in y-Richtung*] *Bestimmen Sie für den nebenstehenden Graphen einen geeigneten Funktionsterm.* [→ *Amplitude* $a = 0{,}5$; *Periode* $4\pi \Rightarrow b = \frac{2\pi}{4\pi} = 0{,}5$; *Verschiebung um 0 nach rechts/links;* *Verschiebung um 1 nach oben;* $\Rightarrow f(x) = 0{,}5\sin(0{,}5x) + 1$] 

3. Exponentialfunktion und Logarithmus

Eine Funktion der Form

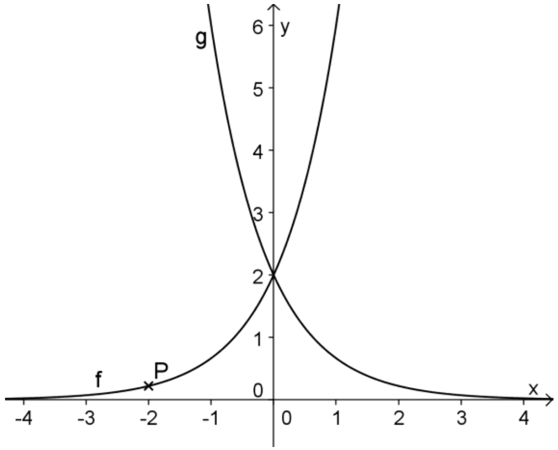
$$f: x \mapsto b \cdot a^x \, ; \, D_f = \mathbf{R} \, ;$$

mit $a, b \in \mathbf{R}$ $(a > 0, \, a \neq 1, \, b \neq 0)$
heißt **Exponentialfunktion zur Basis** a.

Eigenschaften:

- $S_y(0/b) \in G_f$
- keine Nullstelle
- Monotonieverhalten:
  $a > 1$:
  G_f ist streng monoton steigend
  $0 < a < 1$:
  G_f ist streng monoton fallend
- x-Achse ist (waagrechte) Asymptote
- die Graphen von $x \mapsto b \cdot a^x$ und $x \mapsto b \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^x = b \cdot a^{-x}$ sind symmetrisch bezüglich der y- Achse

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbf{R}$ *so, dass die beiden Punkte* P *und* Q *auf dem Graphen* G_f *der Exponentialfunktion* $f: x \mapsto b \cdot a^x \, ; \, D_f = \mathbf{R}$; *liegen.*
Geben Sie das Monotonieverhalten von G_f *an und skizziere den Graphen. Der Graph welcher Funktion liegt bezüglich der y-Achse symmetrisch zu* G_f *?*



a) $P(-2/\frac{2}{9})$ und $Q(2/18)$

[→ $f(-2) = \frac{2}{9} \;\Leftrightarrow\; (I)\;\; b \cdot a^{-2} = \frac{2}{9}$

$f(2) = 18 \;\Leftrightarrow\; (II)\;\; b \cdot a^2 = 18$

$(II):(I)\;\; a^4 = 81 \;\Rightarrow\; a = \pm 3 \;\; (-3 \; entfällt)$

$(II')\;\; b = \frac{18}{a^2} = \frac{18}{9} = 2 \;\Rightarrow\; f: x \mapsto 2 \cdot 3^x$

Wegen $a > 1$ *verläuft* G_f streng monoton steigend;

symmetrisch bezüglich der y-Achse liegt der Graph von $x \mapsto 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.]

b) $P(-1/-6)$ *und* $Q(3/-\frac{3}{8})$

[→ $f: x \mapsto -3 \cdot 0{,}5^x$, G_f *verläuft streng monoton fallend, symmetrisch:* $x \mapsto -3 \cdot 2^x$]

Die eindeutige Lösung der Exponentialgleichung $a^x = b$ $\quad (a > 0, \, a \neq 1, \, b \neq 0)$, heißt **Logarithmus von b zur Basis a**: $x = \log_a b$.

Merksatz: x ist die Zahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten.
Folglich gilt: $a^{\log_a b} = b$.

Bestimmen Sie die reellen Lösungen folgender Gleichungen:

a) $7 \cdot 1{,}3^x + 4 = 18 + 1{,}3^x \;\Leftrightarrow\; 6 \cdot 1{,}3^x = 14 \;\Leftrightarrow\; 1{,}3^x = \frac{7}{3} \;\Leftrightarrow\; x = \log_{1,3} \frac{7}{3} \approx 3{,}23$

b) $\log_x \sqrt[5]{81} = -0{,}4 \;\Leftrightarrow\; \sqrt[5]{81} = x^{-0{,}4} \;\Leftrightarrow\; 81^{\frac{1}{5}} = x^{-\frac{2}{5}} \;\Leftrightarrow\; 9^{\frac{2}{5}} = \left(x^{-1}\right)^{\frac{2}{5}} \;\Leftrightarrow\; 9 = x^{-1} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{9}$

c) $9 \cdot 4^{-x} - 4 = -0{,}25^x + 5$ [→ $x = -\log_4 0{,}9 \approx 0{,}076$]

d) $\log_x \sqrt[3]{625} = -\frac{8}{3}$ [→ $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$]

Rechengesetze für Logarithmen: (*für* $u > 0,\ v > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$) • $\log_a(u\cdot v)=\log_a u+\log_a v$ • $\log_a(u:v)=\log_a u-\log_a v$ • $\log_a u^x = x\cdot\log_a u$ • $\log_a u=\frac{\lg u}{\lg a}$ Zehnerlogarithmus: $\lg u=\log_{10} u$	*Fassen Sie jeweils zu einem einzigen Logarithmus zusammen:* *a)* $\log_a(x^2-y^2)-\log_a(x-y)+\log_a u^3+3\cdot\log_a\frac{1}{u}=$ $=\log_a\frac{(x+y)\cdot(x-y)}{(x-y)}+3\cdot\log_a u+3\cdot\log_a u^{-1}=\log_a(x+y)+3\cdot\log_a u-3\cdot\log_a u=\log_a(x+y)$ *b)* $-\log_a\sqrt{u}-\frac{3}{2}\cdot\log_a u+\log_a(u-1)+\log_a(u+1)$ [→ $\log_a\frac{u^2-1}{u^2}$]
Lösungsstrategien für Exponential-gleichungen: • beidseitiges Logarithmieren, ggf. nach vorherigem Faktorisieren • Substitution **Wachstumsvorgänge**: • lineares Wachstum: konstanter Zuwachs • exponentielles Wachstum: konstanter Wachstumsfaktor	*Bestimmen Sie die reellen Lösungen folgender Gleichungen:* *a)* $3^{2x+2}-7^{x+1}=7^x+3^{2x+1} \Leftrightarrow 3^2\cdot 3^{2x}-3\cdot 3^{2x}=7^x+7\cdot 7^x \Leftrightarrow 6\cdot 3^{2x}=8\cdot 7^x \overset{\text{Logarithmieren}}{\Leftrightarrow}$ $\Leftrightarrow \lg(6\cdot 3^{2x})=\lg(8\cdot 7^x) \Leftrightarrow \lg 6+2x\cdot\lg 3=\lg 8+x\cdot\lg 7 \Leftrightarrow x\cdot(2\cdot\lg 3-\lg 7)=\lg 8-\lg 6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=\frac{\lg 8-\lg 6}{2\cdot\lg 3-\lg 7}\approx 1{,}145$ *b)* $3\cdot 5^x=7\cdot 3^x$ [→ $x=\frac{\lg 7-\lg 3}{\lg 5-\lg 3}\approx 1{,}659$] *c)* $16^x-5\cdot 4^x+6=0$ $(\mathit{Substitution}: u=4^x)$ [→ $x_1=\log_4 2=\frac{1}{2}$; $x_2=\log_4 3$] *d)* $-1+4^x=2\cdot 4^{-x}$ (*Substitution*) [→ $x_1=\frac{1}{2}$; x_2 *entfällt*] *e) Ein Kapital von 5000 € wird mit* 4% *verzinst. Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdoppelt ,* *… wenn man keine Zinseszinsen erhält?* [→ 25 *Jahre*] *… wenn man Zinseszinsen erhält?* [→ $\log_{1{,}04} 2\approx 17{,}7$ *Jahre*] *f) Das Nuklid Jod 131 besitzt eine Halbwertszeit von 8 Tagen. Nach wie vielen Tagen sind* 85% *der ursprünglich vorhandenen Kerne zerfallen?* [→ $8\cdot\log_{0{,}5} 0{,}15\approx 21{,}9$ *Tage*] *g) Wie oft müsste man ein Blatt Papier der Dicke* $0{,}1\,mm$ *falten, so dass es bis zum Mond (Entfernung 384000 km) reicht?* [→ $\log_2 3{,}84\cdot 10^{12}\approx 42\,mal$]

4. Wahrscheinlichkeitsrechnung

In der **Schnittmenge** $A \cap B$ von A und B liegen die Elemente, die zur Menge A **und zugleich** zur Menge B gehören.

In der **Vereinigungsmenge** $A \cup B$ von A und B liegen die Elemente, die zur Menge A **oder** zur Menge B gehören, also mindestens zu einer der beiden Mengen.

Bei einem Zufallsexperiment liefern zwei Ereignisse A und B eine **Zerlegung** der Ergebnismenge Ω in die Teilmengen $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ und $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Jedes Ergebnis ω gehört dann genau einer dieser Teilmengen an.

Zu jeder Vierfeldertafel können zwei sog. **Baumdiagramme** gezeichnet werden.

Sind A und B Ereignisse eines Zufallsexperiments mit $P(A) \neq 0$, so beschreibt die **bedingte Wahrscheinlichkeit** $P_A(B)$ die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von B unter der Bedingung (Voraussetzung), dass A eintritt:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

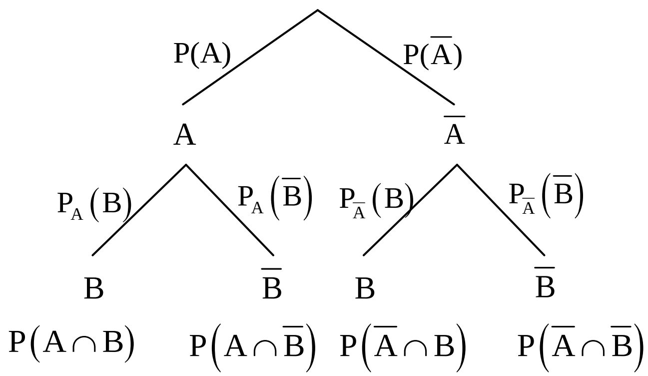
In einer Schulklasse mit 30 Kindern gibt es 21 Mädchen. 12 der Schülerinnen und Schüler tragen eine Brille. Fünf Jungs sind Brillenträger.

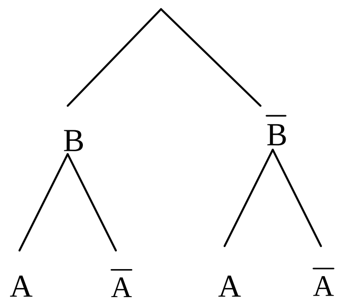
A: Mädchen, B: Brillenträger

Vierfeldertafel ⋆

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B) = 7/30$	$P(A \cap \overline{B}) = 14/30$	$P(A) = 21/30$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B) = 5/30$	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 4/30$	$P(\overline{A}) = 9/30$
	$P(B) = 12/30$	$P(\overline{B}) = 18/30$	$P(\Omega) = 1$

mögliche Baumdiagramme:





Eine Person aus der Klasse wird zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass …

… man unter den Brillenträgern einen Jungen auswählt, $[\rightarrow\ P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{5/30}{12/30} = \frac{5}{12}\ ]$

… die ausgewählte Person ein Mädchen ist <u>und</u> Brille trägt: , $[\rightarrow\ P(A \cap B) = \frac{7}{30}\ ]$

<u>Aber:</u> Wahrscheinlichkeit, dass ein Mädchen aus der Klasse Brille trägt: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{7/30}{21/30} = \frac{1}{3}$

5. Ganzrationale Funktionen

Eine Funktion der Form $f: x \mapsto a \cdot x^n$; $n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, $D_f = \mathbf{R}$, bezeichnet man als **Potenzfunktion** vom **Grad** n.

Der zugehörige Graph G_f heißt **Parabel**.

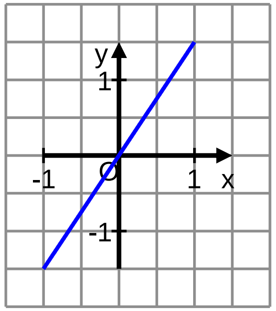
n gerade:

- G_f achsensymmetrisch zur y-Achse
- Wertemenge $\mathbf{R}_0^+$ (für $a > 0$) bzw. $\mathbf{R}_0^-$ (für $a < 0$)

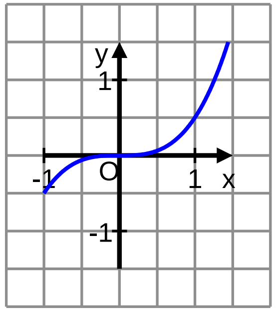
n ungerade:

- G_f punktsymmetrisch zu $O(0/0)$
- Wertemenge $\mathbf{R}$

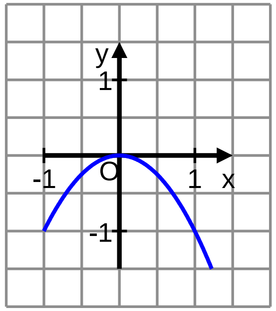
$f: x \mapsto 1{,}5 \cdot x$



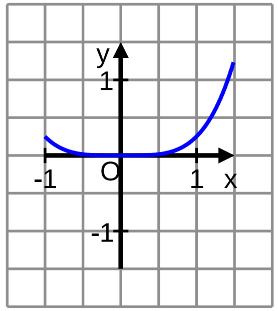
$f: x \mapsto 0{,}5 \cdot x^3$



$f: x \mapsto -x^2$



$f: x \mapsto 0{,}25 \cdot x^4$



Ein Term der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o$$

mit $a_n \neq 0$ heißt **Polynom** vom **Grad n**;
die a_i heißen **Koeffizienten**.

Eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$; $D_f = \mathbf{R}$; mit

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o$$

heißt **Polynomfunktion** vom Grad n oder **ganzrationale Funktion** n-ten Grades.

Dabei gilt:

Ist x_o Nullstelle einer Polynomfunktion vom Grad n, so lässt sich der Funktions-term faktorisieren zu

$$f(x) = (x - x_o) \cdot g(x),$$

worin $g(x)$ ein Polynom vom Grad $n-1$ darstellt.

Bestimmung der Nullstellen der Funktion $f: x \mapsto x^3 + x^2 - 4x - 4$; $D_f = \mathbf{R}$:

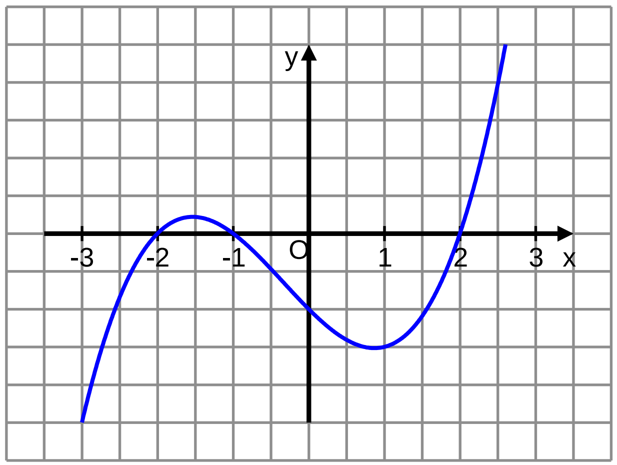
„Kandidaten“ für Nullstellen sind die „Teiler von 4“, also ± 1, ± 2 *und* ± 4.

Die Nullstelle $x_1 = -1$ *findet man durch gezieltes Probieren. Hieraus erhält man durch Polynomdivision:*

$$\left(x^3 + x^2 - 4x - 4\right) : (x+1) = x^2 - 4$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^3 + x^2} \\ \qquad\quad -4x - 4 \\ \qquad\quad \underline{-4x - 4} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

G_f ★



(y-Achse unskaliert!)

Die vollständig faktorisierte Darstellung der Polynomfunktion lautet demnach

$$f: x \mapsto x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x+2)$$

Die Polynomfunktion hat somit die drei einfachen Nullstellen $x_1 = -1$, $x_2 = -2$ *und* $x_3 = 2$.

Ist $a_n = 1$ und x_o ganzzahlig, so ist x_o stets ein Teiler von a_o.

$g(x)$ erhält man durch **Polynomdivision**.

Eine Polynomfunktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Der Summand $a_n x^n$ mit dem größten Exponenten bestimmt das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$.

Weitere Beispiele:

a) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{4}x^2 + 9$; $D_f = \mathbf{R}$ [$\to$ $f(x) = \frac{1}{4}\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+3)\cdot(x-3)$]

b) $f: x \mapsto x^4 - x^3 - 12x^2 - 4x + 16$; $D_f = \mathbf{R}$ [$\to$ $f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1)\cdot(x-4)$]

c) $f: x \mapsto x^3 - 6x^2 + 12x - 8$; $D_f = \mathbf{R}$ [$\to$ $f(x) = (x-2)^3$]

6. Eigenschaften von Funktionen und ihren Graphen

Manipulation von Funktionstermen:

Änderungen des Funktionsterms und deren Auswirkungen auf den Graphen G_f einer Funktion $f: x \mapsto f(x); x \in D_f$:

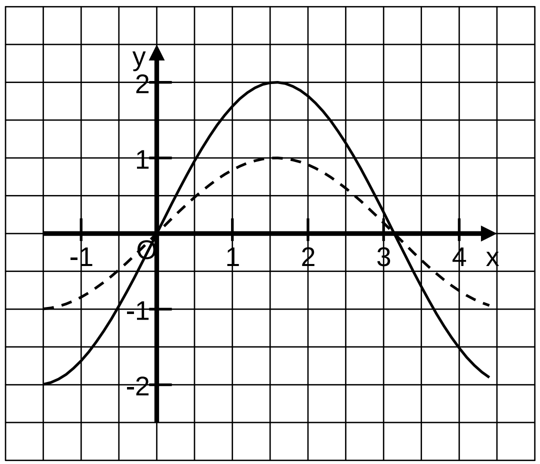
$g: x \mapsto f(x) + c$:
Verschiebung um c in y-Richtung

$g: x \mapsto f(x+b)$:
Verschiebung um $-b$ in x-Richtung

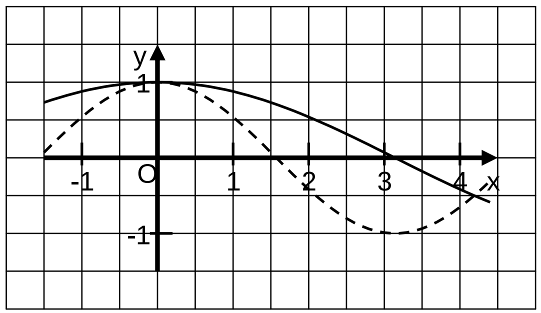
$g: x \mapsto a \cdot f(x)$:
Streckung um Faktor a in y-Richtung

$g: x \mapsto f(d \cdot x)$:
Streckung um Faktor d^{-1} in x-Richtung

$f(x) = \sin x$; $g(x) = 2 \cdot \sin x$



$f(x) = \cos x$; $g(x) = \sin(0{,}5x)$



(Die Graphen der Funktionen f sind jeweils gestrichelt gezeichnet.)

Der Graph G_f einer **geraden** Funktion $f: x \mapsto f(x)$ mit $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$ verläuft symmetrisch zur y-Achse eines kartesischen Koordinatensystems.

Der Graph einer **ungeraden** Funktion mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$ verläuft punktsymmetrisch zu dessen Ursprung.

Untersuchen Sie die in ganz $\mathbf{R}$ *definierten Funktionen* $f: x \mapsto 0{,}5x^2 + \cos x + 2$, $g: x \mapsto \frac{1}{8}x^2 + 2x + 2$ *und* $h: x \mapsto x^3 + 2x + \sin x$ *auf einfache Symmetrieeigenschaften.*

a) $f(-x) = 0{,}5(-x)^2 + \cos(-x) + 2 = 0{,}5x^2 + \cos x + 2 = f(x)$ [$\to$ *f gerade*]

b) $g(-x) = \frac{1}{8}(-x)^2 + 2\cdot(-x) + 2 = \frac{1}{8}x^2 - 2x + 2 \neq \pm g(x)$ [$\to$ *g weder gerade noch ungerade*]

c) $h(-x) = (-x)^3 + 2\cdot(-x) + \sin(-x) = -x^3 - 2x - \sin x = -h(x)$ [$\to$ *h ungerade*]

Eine Funktion **konvergiert** für $x \to +\infty$ gegen den (endlichen) **Grenzwert** a, wenn die Funktionswerte der Zahl a beliebig nahe kommen, wenn also der Termwert $\lvert f(x) - a \rvert$ für hinreichend große Zahlen x verschwindend klein wird. Schreibweise: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$. Entsprechend ist auch der Grenzwert für $x \to -\infty$ definiert. Nicht konvergente Funktionen heißen **divergent**.	*Untersuchen Sie das Grenzverhalten der Funktion* $f: x \mapsto \frac{2x+3}{x+1}$; $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$; für $x \to +\infty$. *1. Möglichkeit:* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+3}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \left(2 + \frac{3}{x}\right)}{x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{2}{1} = 2$ *2. Möglichkeit:* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+3}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+2+1}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2 \cdot (x+1)+1}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x+1}\right) = 2$ *Die Funktion ist somit konvergent mit dem Grenzwert* $a = 2$. *Die Gerade mit der Gleichung* $y = 2$ *bildet eine (waagrechte) Asymptote des zugehörigen Funktionsgraphen.*