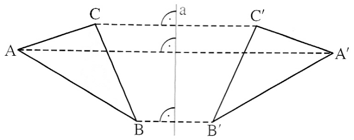
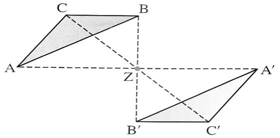
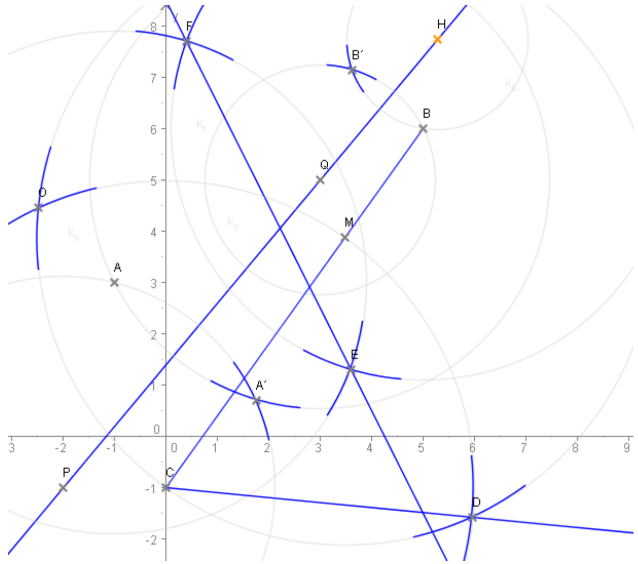
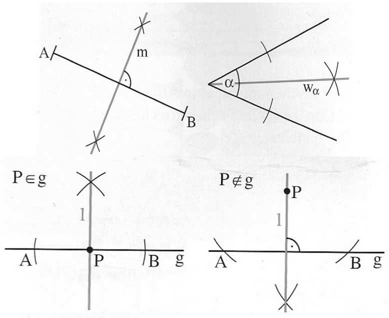
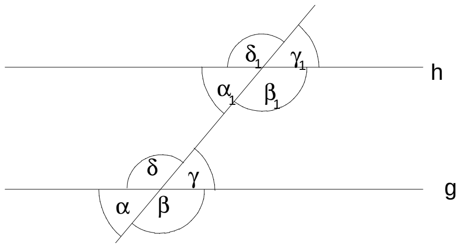
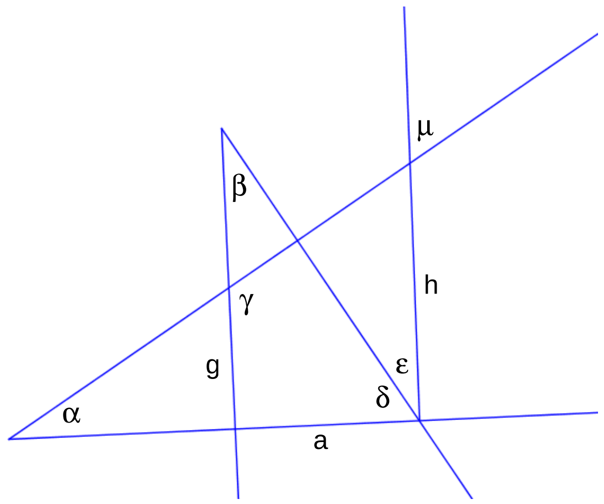
CJT-Gymnasium Lauf → Grundwissen (& Aufgaben) Jahrgangsstufe 7 (7/2006)

Wissen / Können	**Beispiele**
1. Symmetrie	
Achsensymmetrie: Symmetrieachse a, [AA’] ist senkrecht zu a und wird von a halbiert, strecken- und winkeltreu, Umlaufsinn ändert sich  **Punktsymmetrie:** (auch) Halbdrehung um das Zentrum Z, [BB’] wird von Z halbiert, strecken- und winkeltreu, Umlaufsinn bleibt erhalten 	*Gegeben sind die drei Punkte* $A(-1/3)$, $B(5/6)$, $C(0/-1)$ *sowie die Symmetrieachse* a *durch* $Q(3/5)$ *und* $P(-2/-1)$. *1. Spiegle A und B an der Achse a !* *2. Konstruiere zur Strecke [AB] die Mittelsenkrechte!* *3. (unter Einbeziehung einer Grundkonstruktion, s.u.) Konstruiere einen möglichen Punkt D so, dass* $\angle BCD = 300^o$ *gilt!* Lösung → 
Grundkonstruktionen: Mittelsenkrechte *m*, Winkelhalbierende *w*, Lot *l*, , Winkelkonstruktionen (z.B. 90^o, 45^o, 60^o, 30^o, ...), Spiegelpunkte bei Achsen und Punktspiegelung 	*Konstruiere je einen Winkel der Größe* $22{,}5^o$ *bzw.* 75^o. $[\rightarrow \frac{1}{4}\cdot 90^o$ *bzw.* $\frac{1}{2}\cdot 90^o + \frac{1}{2}\cdot 60^o\ ]$ *Konstruiere die Mittelparallele zu zwei (beliebigen) parallelen Geraden.* *Zeichne den Buchstaben* L *und konstruiere sein Spiegelbild bei der Punktspiegelung an einem von dir beliebig gewählten Zentrum Z.*

Symmetrieeigenschaften von Dreiecken: Gleichschenkliges und gleichseitiges Dreieck Symmetrieeigenschaften von Vierecken: Quadrat, Rechteck, Raute, Parallelogramm, (gleichschenkliges) Trapez, Drachenviereck	*Besitzt jedes Dreieck eine Symmetrieachse oder ein Symmetriezentrum? Zeichne - sofern möglich - jeweils ein Dreieck mit genau einer, genau zwei und genau drei Symmetrieachsen. Welches dieser Dreiecke ist punktsymmetrisch? Kann ein achsen- bzw. punktsymmetrisches Dreieck einen rechten Winkel besitzen?* *Zeichne jeweils ein Beispiel zu den folgenden Vierecken und trage deren Symmetrieachsen bzw. deren Symmetriezentrum ein: Quadrat, Rechteck, Raute, Parallelogramm, achsensymmetrisches Trapez und Drachenviereck*
2. Winkelgesetze	
 **Scheitelwinkel** sind gleich groß (z.B. $\alpha = \gamma$); **Nebenwinkel** ergänzen sich zu 180^o (z.B. $\alpha + \beta = 180^o$). **Stufenwinkel** (z.B. α *und* α_1) und **Wechselwinkel** (z.B. β *und* δ_1) an zwei Geraden g und h sind genau dann gleich groß, wenn g und h zueinander parallel sind.	*Wenn in der Skizze auf der linken Seite $\gamma = 65^o$ ist, wobei die Geraden* g *und* h *parallel zueinander verlaufen, wie groß ist dann δ_1? Begründe!* [$\rightarrow 115^o$]  *Berechne die Winkel $\beta, \gamma, \delta, \mu$ und ε in nebenstehender Figur für den Fall, dass $\alpha = 32^o$ und $g \parallel h$ gilt.* *Argumentiere dabei in mathematischer Fachsprache!*
Die **Innenwinkelsumme** im n-Eck beträgt $(n-2)\cdot 180^o$; speziell: Dreieck: 180^o; Viereck: 360^o.	*Berechne die Innenwinkelsumme in einem 7-Eck und gib an, wie viele Ecken ein Vieleck mit der Innenwinkelsumme 1800° besitzt.* [$\rightarrow 900^o$ bzw. 12] *Zeichne jeweils ein spitzwinkliges, ein rechtwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck (mit dem Umfang 12 cm).*
3. Terme und äquivalente Termumformungen	
Aufstellen und Gliedern von Termen, Berechnen von Termwerten	*Dividiere die doppelte Differenz von $2x$ und a durch -3.* *Gliedere $T(x;y) = (5+x)\cdot 2 - y : 4$ vollständig und berechne anschließend $T(0;0)$; $T(-2;2)$ und $T(2a;-a)$.* *Wie viele Spiele finden in einer Bundesligasaison statt? Wie viele Spiele wären es bei (nur) 16 Mannschaften, wie viele bei einer geraden Anzahl n von Teams?*

Veranschaulichung von Termen	*Zeichne die Graphen zu* $T_1(n) = 4 - n$ *und* $T_2(n) = n \cdot (n-1)$ *in ein (gemeinsames) Koordinatensystem. Für welche Einsetzungen sind diese beiden Terme demnach äquivalent?* [$\rightarrow -2$ bzw. 2]
Zusammenfassen gleichartiger Terme in Summen und Differenzen Anwendung von Rechengesetzen: KG, AG, DG (vgl. GW5) Produkte von Summen und Differenzen: $(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd$; $(a-b)\cdot(c-d) = ac - ad - bc + bd$. Spezialfall der „Binomischen Formeln“: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$.	*Fasse jeweils so weit wie möglich zusammen:* $4{,}5x - x + 0{,}25x = ...?$ [$\rightarrow 3{,}75x$] $2{,}5xy - y - 5{,}2yx + x = ...?$ [$\rightarrow x - y - 2{,}7xy$] *Vereinfache so weit wie möglich:* $3ab^2 - 4a^2b + ab^2 - 5a^2b = ...?$ $(-2x)^2 \cdot (-3xy)^3 \cdot xy = ...?$ $(4x^2 + 5x)\cdot(-2x) = ...?$ $(25r^2q - 15rq^2) : (5rq) = ...?$ *Multipliziere aus:* $(2x+y)\cdot(x-2y) = ...?$ $(p-q)\cdot(pq-1) = ...?$ *Vereinfache so weit wie möglich:* $(x^2+y)\cdot(x-y^2) - (x^2-y^2)\cdot(x-y) = ...?$ *Schreibe ohne Klammern:* $(7g+h)^2 = ...?$ $\left(\frac{1}{2}z - 1\right)^2 = ...?$ $(0{,}1p - 0{,}3q)\cdot(0{,}3q + 0{,}1p) = ...?$ *Ergänze:* $(2b + ...)^2 = ... + 8b + ...$ *Schreibe als Produkt:* $\frac{1}{4}a^2 + 9b^2 - 3ab = ...?$

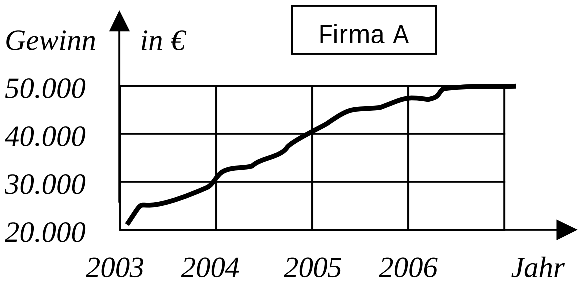
4. Lösen von linearen Gleichungen

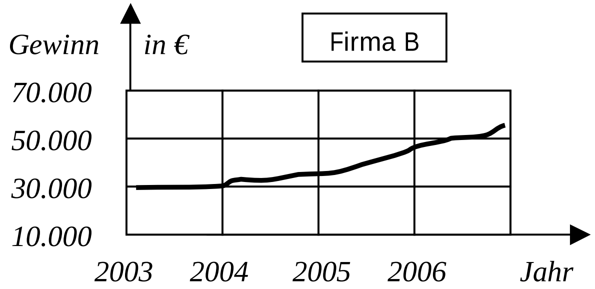
Äquivalenzumformung von Gleichungen: „...Gleiches auf beiden Seiten...“	*Welche Vorgänge sind bei einer Gleichung erlaubt, ohne dass sich dadurch ihre Lösungsmenge L verändert? Stelle dir hierzu eine im Gleichgewicht befindliche Waage vor.* *Multipliziere in der Gleichung* $1{,}5 - 0{,}25x = -0{,}125$ *auf beiden Seiten mit* -4.
Systematisches Lösen von linearen Gleichungen: § Auflösen der Klammern § Vereinfachen beider Seiten § Platzhalter auf einer Seite, Zahlen auf der anderen Seite sammeln § Berechnen des Platzhalters § Probe	*Löse die Gleichung* $19 - 2\cdot\left(\frac{1}{3}x + 2\right) = 34 + 4\cdot(x-3)$ *für rationale Zahlen.* [$\rightarrow L = \{-1{,}5\}$] *Welche ganze Zahl - wenn überhaupt - besitzt folgende Eigenschaft?* *Das Fünffache einer Zahl ist um 14 kleiner als die Differenz aus dem 2,5-fachen dieser Zahl und der Zahl 4.* [$\rightarrow x = -7{,}2 \Rightarrow L = \{\}$] *Für welche rationalen Zahlen gilt:* $(0{,}5x - 2)\cdot(x+3) = 0$ *?* [$\rightarrow L = \{-3; 4\}$]
Sachaufgaben	*In einem Käfig sind Hasen und Hühner eingesperrt. Die Tiere haben zusammen 35 Köpfe und 94 Füße. Wie viele Hasen sind im Käfig?* [$\rightarrow$ 12 Hasen] *„KIBA“: Bananennektar (25 % Fruchtsaftgehalt) wird mit Sauerkirschnektar (50 % Fruchtsaftgehalt) gemischt. Wie viel Sauerkirschnektar benötigt man, um mit 0,1 l Bananennektar ein Getränk mit 45 % Fruchtsaftgehalt zu bekommen?* [$\rightarrow 0{,}4\ l$]

5. Diagramme

Auswerten (Deuten) von Diagrammen

Wann stieg der Gewinn jeder der Firmen das erste Mal über 40.000 € ?
Warum hat Firma B danach eine größere Gewinnsteigerung, obwohl es auf den ersten Blick anders aussieht?

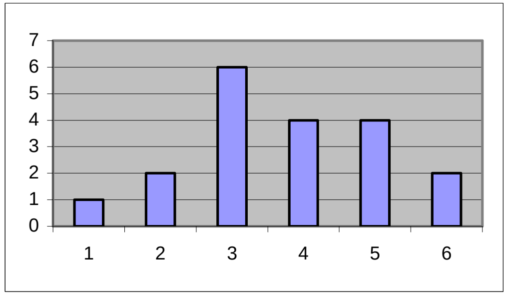




Arithmetischer **Mittelwert**:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n}{n}$$

(Das arithmetische Mittel schafft einen Ausgleich zwischen großen und kleinen Werten. Die Abweichungen vom Mittelwert ergeben zusammen Null.)



Die Schüler einer Klasse erreichen in einer Prüfung die links dargestellte Notenverteilung.

Eine Note wurde vergessen einzutragen. Der Durchschnitt (Mittelwert) sämtlicher Noten beträgt 3,75. Berechne die fehlende Note.

[→ Note 4]

Der durchschnittliche Pro-Kopf-Verbrauch von sieben Testpersonen (A ... G) beträgt 3 Liter Milch pro Woche:

Person	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
Verbrauch	*2,5 l*	*4,5 l*	*3,0 l*	*3,5 l*	*?*	*0,5 l*	*5,0 l*

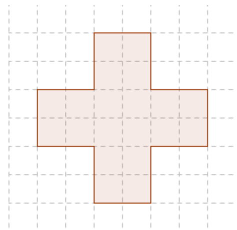
1. *Erstelle hierzu ein passendes Säulendiagramm!*
2. *Der Verbrauch von Person E ist verlorengegangen. Berechne ihn!* [→ 2,0 *l*]

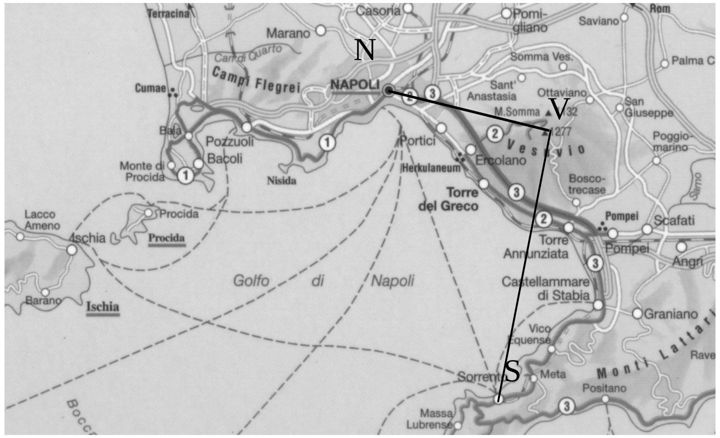
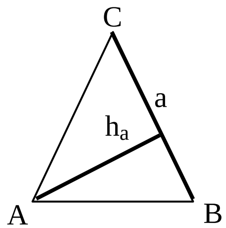
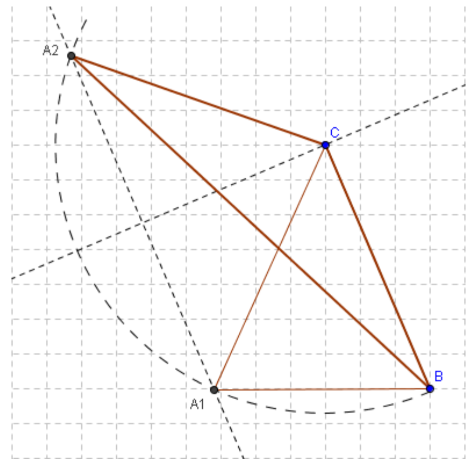
6. Dreieckskonstruktionen

Kongruenz von Figuren

Zwei deckungsgleiche Figuren F und G heißen kongruent (F ≅ G).

Zeichne die nebenstehende Figur auf ein kariertes Blatt und zerlege sie in vier zueinander kongruente Teilflächen!



Kongruenzsätze für Dreiecke: § SSS § SsW *) § SWS § WSW (bzw. SWW) **) *) die dem gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite muss die längere beider Seiten sein **) vgl. Winkelsumme im Dreieck **Seiten-Winkel-Beziehung**: In jedem Dreieck liegt der längeren Seite der größere Winkel gegenüber und umgekehrt.	*Überprüfe, ob ein Dreieck ABC aus folgenden Angaben eindeutig konstruierbar ist und gib den entsprechenden Kongruenzsatz an!* *a)* $a = 4\ cm,\ c = 6\ cm,\ \beta = 85^o$ *b)* $b = 3{,}5\ cm,\ c = 7\ cm,\ \beta = 43^o$ [→ a) SWS, b) nicht eindeutig] *Begründe, ob folgende Dreiecke jeweils kongruent sind:* *a)* $a_1 = 5\ cm,\ \alpha_1 = 52^o,\ \gamma_1 = 23^o$ *und* $b_2 = 5\ cm,\ \alpha_2 = 23^o,\ \beta_2 = 52^o$ [→ SWW] *b)* $c_1 = 6{,}4\ cm,\ \alpha_1 = 50^o,\ \beta_1 = 75^o$ *und* $a_2 = 6{,}4\ cm,\ \alpha_2 = 50^o,\ \beta_2 = 75^o$ [→ nicht kongruent] *Um die Entfernung zwischen Neapel (Napoli,* N*) und Sorrent (Sorrento,* S*) auf dem Schiffsweg zu bestimmen, peilt Karin vom Vesuv (Vesuvio,* V*) aus die beiden Städte an. Sie misst die Entfernung zu* N *mit ca. 14 km und zu* S *mit ca. 22 km. Der Winkel zwischen den Strecken* [VN] *und* [VS] *beträgt* 94^o. *Ermittle mit Hilfe einer maßstabsgetreuen Zeichnung die Länge der Strecke* [NS]. *Gib an, welchen Maßstab du verwendet hast.* [→ ca. $27\ km$] 
Konkrete (systematische) Durchführung von **Konstruktionen**: § Planfigur § Konstruktionsplan § Eigentliche Konstruktion (Auf die Anzahl möglicher Lösungen achten!)	*Konstruiere ein (gleichschenkliges) Dreieck ABC mit* $a = b,\ a = 7{,}0\ cm,\ h_a = 7{,}0\ cm$. *Wie viele Lösungen gibt es?* → Planfigur:  →  → Konstruktionsplan: Die Punkte B und C sind durch $\overline{BC} = a$ gegeben. A liegt auf 1. der Kreislinie $k\ (C;\ r = a)$, 2. der Parallelen zu [BC] im Abstand h_a. → Es gibt zwei nicht kongruente Lösungen: $\Delta\ A_1BC$ und $\Delta\ A_2BC$.

7. Besondere Linien (Transversalen) im Dreieck

Konstruktion und Eigenschaften von besonderen Linien (sog. Transversalen) im Dreieck:

§ Höhe
§ Mittelsenkrechte
§ Seitenhalbierende
§ Winkelhalbierende

Besondere Punkte im Dreieck:

§ Umkreismittelpunkt (siehe a)
§ Inkreismittelpunkt (siehe b)
§ Schwerpunkt (siehe c)

Welche zwei der folgenden Eigenschaften gelten jeweils zwingend für Höhe h, Winkelhalbierende w, Seitenhalbierende s und Mittelsenkrechte m eines Dreiecks:

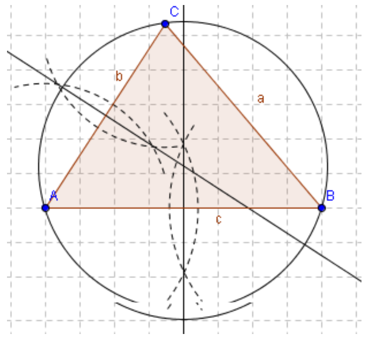
A) sie verläuft durch eine Ecke
B) sie verläuft durch eine Seitenmitte
C) sie verläuft senkrecht zu einer Seite
D) sie halbiert einen Innenwinkel

$[\rightarrow\ h: A,C;\ w: A,D;\ s: A,B;\ m: B,C\,]$

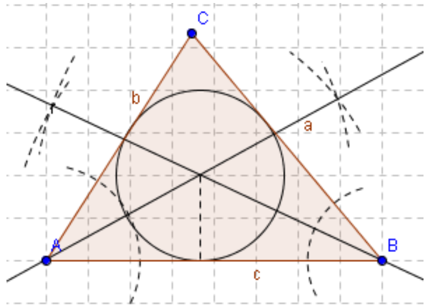
Gegeben ist das Dreieck ABC durch $a = 7\ cm$, $c = 8\ cm$ *und* $\beta = 50^o$.

Konstruiere a) den Umkreis, b) den Inkreis, c) den Schwerpunkt des Dreiecks ABC !

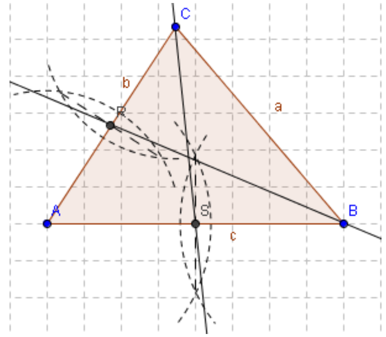
a)



b)



c)



Besondere Dreiecke:

§ gleichschenkliges Dreieck

Basiswinkelsatz:

Im gleichschenkligen Dreieck sind die beiden Basiswinkel gleich groß.

§ gleichseitiges Dreieck

Im gleichseitigen Dreieck betragen alle Innenwinkel 60°.

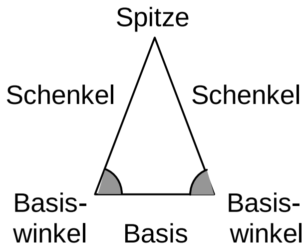
§ rechtwinkliges Dreieck

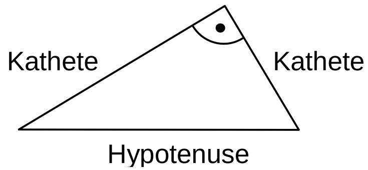
Satz des Thales:

Liegen die drei Punkte so auf einem Kreis, dass eine Seite Durchmesser ist, so besitzt das Dreieck einen rechten Winkel.

Benenne besondere Seiten und Winkel im gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreieck! Verwende dabei die mathematischen Fachausdrücke.

→





Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $c = 8{,}0\ cm$ *und der Kathete* $b = 6{,}0\ cm$.

$[\rightarrow\ a \approx 5{,}3\ cm,\ \alpha \approx 41{,}5^o,\ \beta \approx 48{,}5^o\,]$

Begründe den Satz des Thales! Formuliere zum Satz des Thales auch den (wahren) Kehrsatz und begründe ihn!