CJT-Gymnasium Lauf $\rightarrow$ **Grundwissen** (& Aufgaben) **Jahrgangsstufe 8** (7/2007)

Wissen / Können	**Beispiele**

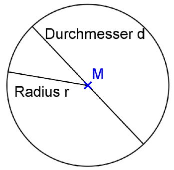
1. Kreis

Für einen **Kreis** mit **Radius r** gilt:

§ **Umfang:** $U = 2 \cdot \pi \cdot r$

§ **Flächeninhalt:** $A = \pi \cdot r^2$

§ $\pi \approx \frac{22}{7} \approx 3{,}14$ heißt **Kreiszahl**.



Ein Kreis hat den Durchmesser 6,4 cm. Berechne Umfang und Flächeninhalt.

[$\rightarrow$ $20{,}1\,cm$; $32{,}2\,cm^2$]

Wie verändern sich Umfang U und Flächeninhalt A, wenn man den Kreisdurchmesser d verdreifacht?

[$\rightarrow$ *Ver-3-fachung bzw. Ver-9-fachung*]

2. Zuordnungen

Eine **Zuordnung** $x \mapsto y$ weist jedem vorgegebenen x einen oder mehrere Werte y zu.

Quadrat: Länge x (*in cm*) $\mapsto$ *Fläche A* (*in* cm^2)

kurz: $x \mapsto A = x^2$; *z.B.* $2\,cm \mapsto 4\,cm^2$

Wetter: Temperatur $\vartheta \mapsto$ *Zeitpunkt t ; kurz:* $\vartheta \mapsto t$;

z.B. $24{,}5\,°C \mapsto 11.30$ *Uhr oder* 15.27 *Uhr*

Gleichwertige Erkennungsmerkmale für (**direkte**) **Proportionalität**:

- **Wertetabelle**: Die Ver-**r**-fachung der einen Größe (z.B. x) führt zur Ver-**r**-fachung der zugeordneten Größe (y).
- **Quotientengleichheit**: Für einander zugeordnete Größen $x \mapsto y$ sind die Quotienten $\frac{y}{x}$ gleich ($x, y \neq 0$);
  der (konstante) Quotient $q = \frac{y}{x}$ heißt **Proportionalitätsfaktor**.
- Die **Zuordnungsvorschrift** hat die Form $x \mapsto y = q \cdot x$ (q ist konstant).
- Der Graph dieser Zuordnung ist eine **Ursprungs**(halb)**gerade** mit der konstanten Steigung q.

o *Alternative Kurzschreibweise:* $y \sim x$

Einkauf: Masse m $\mapsto$ *Preis P*

Wertetabelle:

m in kg	*0*	*0,50*	*0,70*	*1,50*	*2,00*	*5,00*	*?*
P in €	*0*	*3,50*	*4,90*	*10,50*	*14,00*	*?*	*17,5*

[$\rightarrow$ 35 € ; 2,5 *kg*]

Quotientengleichheit: $\frac{3{,}50\,€}{0{,}50\,kg} = \frac{4{,}90\,€}{0{,}70\,kg} = \ldots = \frac{14{,}00\,€}{2{,}00\,kg} = q$. *Welche Bedeutung hat hier q?*

Zuordnungsvorschrift: $\frac{P}{m} = 7\,\frac{€}{kg} \;\Rightarrow\; P = 7\,\frac{€}{kg} \cdot m \;\Rightarrow\; m \mapsto P = 7\,\frac{€}{kg} \cdot m$

Zeichne den Graphen!

Gleichwertige Erkennungsmerkmale für **indirekte** (oder auch **umgekehrte**) **Proportionalität**:

- **Wertetabelle**: Die Ver-**r**-fachung der einen Größe führt zur **r**-Teilung (Ver-$\frac{1}{r}$-fachung) der zugeordneten Größe.
- **Produktgleichheit**: Für zugeordnete Größen $x \mapsto y$ sind die Produkte $p = x \cdot y$ konstant ($x, y \neq 0$).
- Die **Zuordnungsvorschrift** hat die Form $x \mapsto y = \frac{p}{x}$ (p ist konstant).
- Der Graph dieser Zuordnung ist eine **Hyperbel**.

o *Alternative Kurzschreibweise:* $y \sim \frac{1}{x}$

Ein Rechteck hat den festen Flächeninhalt $18\,cm^2$.
Betrachte die Zuordnung: Länge l (*in cm*) $\mapsto$ *Breite* b (*in cm*), *kurz:* $l \mapsto b$

Erstelle eine Wertetabelle, zeichne den Graphen und notiere die Zuordnungsvorschrift.

→ *Wertetabelle:*

l in cm	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
b in cm	*18*	*9*	*6*	*4,5*	*3,6*	*3*

Produktgleichheit:

$$l \cdot b = 1\,cm \cdot 18\,cm = 2\,cm \cdot 9\,cm = \ldots = 18\,cm^2$$

Zuordnungsvorschrift:

$$l \cdot b = 18\,cm^2 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{18\,cm^2}{l} \quad \Rightarrow \quad l \mapsto b = \frac{18\,cm^2}{l}$$

3. Funktionen

Eine Zuordnung $f: x \mapsto y$, die jedem vorgegebenen x jeweils nur einen Wert y zuordnet, nennt man **Funktion**.

Den Wert y kann man oft durch einen **Funktionsterm** $f(x)$ berechnen. Die Gleichung $y = f(x)$ nennt man dann **Funktionsgleichung.**

Alle Zahlen, für die ein Funktionswert berechnet werden soll/darf, bilden die **Definitionsmenge** D_f.

Die Menge aller Funktionswerte nennt man die **Wertemenge** W_f von f.

Jede Zahl $x \in D_f$ mit $f(x) = 0$ heißt **Nullstelle**; hier schneidet der Funktionsgraph die x-Achse.

Zuordnungsvorschrift: $f: x \mapsto \frac{0{,}5\,x}{x-1}$

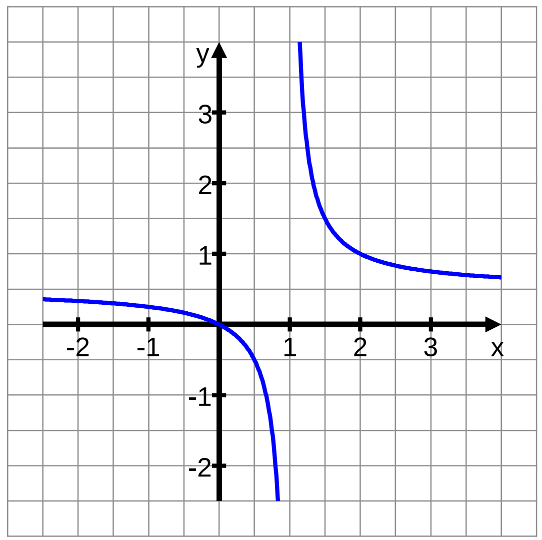
Funktionsterm: $f(x) = \frac{0{,}5\,x}{x-1}$

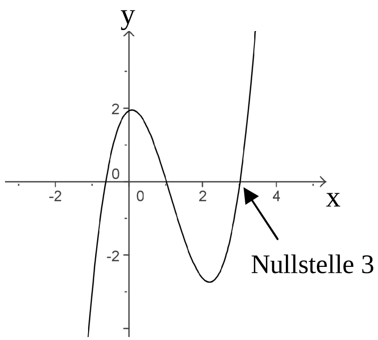
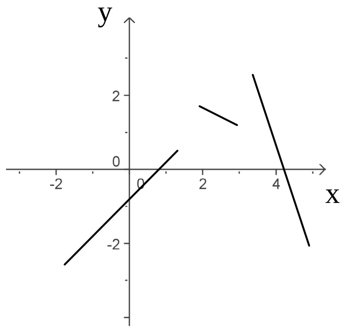
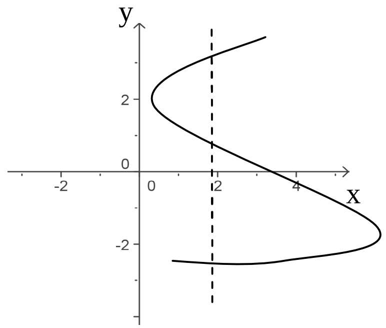
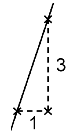
Funktionsgleichung: $y = \frac{0{,}5\,x}{x-1}$

Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$

Wertemenge: $W_f = \mathbb{Q} \setminus \{0{,}5\}$

(einzige) Nullstelle: $x = 0$, *denn* $f(0) = \frac{0{,}5 \cdot 0}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0$



Der **Graph** G_f einer Funktion f besteht aus den Punkten $(x\|y)$ aller einander zugeordneten Wertepaare. Jedes Lot zur *x-Achse* schneidet einen Funktionsgraphen höchstens einmal.	*Funktionsgraphen*   *kein Funktionsgraph* 
$f: x \mapsto y = m \cdot x + b$ mit $m, b \in \mathbf{Q}$ heißt **lineare Funktion**. Es gilt: • Ihr Graph ist eine Gerade, welche die *y-Achse* in $S(0\|b)$ schneidet.. • m heißt **Steigung** des Graphen G_f • $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ für alle $x_1 \neq x_2$	*Bestimme den Funktionsterm einer linearen Funktion g mit Steigung 3, deren Graph durch den Punkt* $P(5\|8)$ *verläuft. Zeichne den Graphen.*  [→ $g(x) = 3x - 7$, *Steigungsdreieck!*] $P(3\|4)$ *und* $Q(-2\|-5)$ *liegen auf* G_f. *Bestimme Funktionsgleichung und Nullstelle der linearen Funktion f.* [→ $m = \frac{9}{5}$; $y = \frac{9}{5} \cdot x - \frac{7}{5}$; *Nullstelle:* $x = \frac{7}{9}$] *Liegt* $R(11\|18)$ *oberhalb oder unterhalb von* G_f *?* [→ *unterhalb, denn* $f(11) = 18{,}4 > 18$]
Gebrochen rationale Funktionen sind Funktionen, deren Funktionsterm ein **Bruchterm** ist. Eine Gerade, an die sich der Graph einer Funktion beliebig genau annähert, heißt **Asymptote**.	*Bestimme die Definitionsmenge und die Asymptoten der Funktion* $f: x \mapsto \frac{x + 3{,}5}{5 - x}$. *Skizziere damit* G_f. [→ $D_f = \mathbf{Q} \setminus \{5\}$, *senkrechte Asymptote:* $x = 5$, *waagrechte Asymptote:* $y = \frac{1}{-1} = -1$]

4. Gleichungen/Ungleichungen

Gleichungen lassen sich **rechnerisch** (durch Äquivalenzumformungen) und **graphisch** (Untersuchung auf Schnittpunkte beider Graphen) **lösen**.	*Löse* $2x - 4 = -0{,}5x + 3$ *rechnerisch und graphisch für* $x \in \mathbf{Q}$. *Welchen Vor- bzw. Nachteil hat das graphische Lösungsverfahren?* [→ $x = 2{,}8$; *zur graphischen Lösung siehe auch „5. Gleichungssysteme“*]
Lösen **linearer Ungleichungen:** Multipliziert/Dividiert man beide Seiten der Ungleichung mit einer **negativen Zahl**, so muss das Ungleichheitszeichen umgedreht werden.	*Löse die Ungleichung* $-3{,}5x - 9 \leq -\frac{1}{2}x + 3$ *für* $x \in \mathbf{Q}$ *und gib die Lösungsmenge auch in Intervallschreibweise an.* [→ $L = \{x\| x \geq -4\} = [-4; +\infty[$]

5. Gleichungssysteme

- **graphische Lösung**:

Geraden zeichnen und die Koordinaten gemeinsamer Punkte bestimmen (falls vorhanden)

- **rechnerische Lösung**:

a) **Einsetzungsverfahren**:

(Sonderfall: Gleichsetzungsverfahren:

Eine der beiden Gleichungen nach einer Unbekannten auflösen und diesen Term in die andere Gleichung einsetzen.

b) **Additionsverfahren**:

Eine (oder beide) Gleichung(en) mit einer geeigneten Zahl multiplizieren, so dass beim Addieren/Subtrahieren beider Gleichungen eine Unbekannte wegfällt.

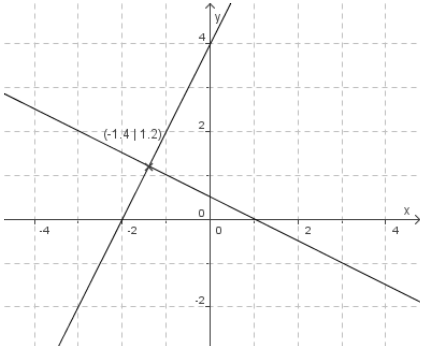
Nach der verbleibenden Unbekannten auflösen und den so erhaltenen Wert in eine der beiden Gleichungen einsetzen, um die andere Unbekannte zu berechnen.

- **Lösung** ist ein Zahlenpaar oder leere Menge oder unendlich viele Zahlenpaare!

Löse graphisch und rechnerisch:

$I)\quad x + 2y = 1$

$II)\quad -2x + y = 4$

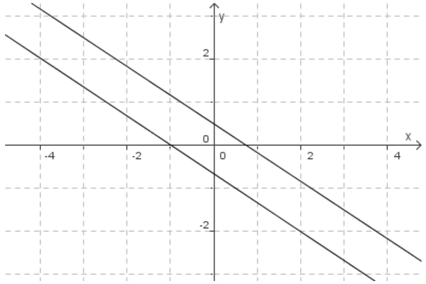


Schnittpunkt

[$\rightarrow$ $L = \{(-1{,}4|1{,}2)\}$]

$I)\quad 6y - 4x = 3$

$II)\quad 2x - 3y = -2$

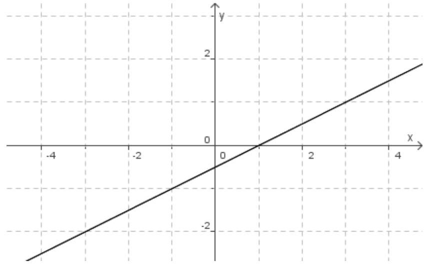


echt parallele Geraden

[$\rightarrow$ $L = \{\}$]

$I)\quad x - 1 = 2y$

$II)\quad 2x - 4y = 2$



zusammenfallende Geraden

[$\rightarrow$ $L = \{(x|y) \mid y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\}$]

Sachaufgaben

1. *Marlene und Carmen wohnen 17 km voneinander entfernt. Um sich zu treffen, fahren sie sich mit dem Fahrrad entgegen, wobei Marlene durchschnittlich* $15\frac{km}{h}$ *fährt und Carmen im Durchschnitt sogar* $21\frac{km}{h}$ *schafft, aber 20 Minuten später als Marlene losfährt. Wann und wo treffen sich die beiden?*

[$\rightarrow$ *40 min nachdem Marlene losfuhr und 10 km von Marlenes Haus entfernt*]

2. *Bei einer Theateraufführung wurden 250 Karten verkauft und damit 2428 € eingenommen, wobei eine Karte für Kinder 7 € und eine für Erwachsene 13 € kostete. Wie viele Kinder und wie viele Erwachsene besuchten die Vorstellung?*

[$\rightarrow$ *113 Erwachsene und 137 Kinder*]

6. Zählprinzip und Laplace-Experimente

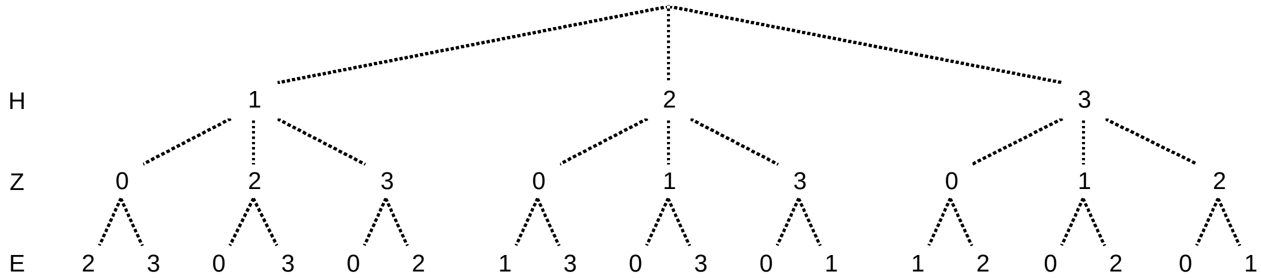
Zählprinzip:

Um die Gesamtzahl der Möglichkeiten eines mehrstufigen Zufallsexperiments zu erhalten, muss man die Anzahlen der Möglichkeiten in den einzelnen Stufen multiplizieren.

Baumdiagramm

1. In einem Restaurant werden zwei Vorspeisen, vier Hauptgerichte und drei Nachspeisen angeboten. Wie viele verschiedene dreigängige Menüs können serviert werden? [$\rightarrow\ 2\cdot 4\cdot 3 = 24$]

2. Wie viele dreistellige natürliche Zahlen lassen sich aus den Ziffern 0, 1, 2 und 3 bilden, wenn jede Ziffer höchstens einmal vorkommen darf? [$\rightarrow\ 3\cdot 3\cdot 2 = 18$]



Laplace-Experiment:

Zufallsexperiment, bei dem sämtliche Ergebnisse gleichwahrscheinlich sind;

Ergebnismenge Ω**;**

Ereignis A ist eine Teilmenge von Ω, $|A|$ benennt die Anzahl der Ergebnisse des Ereignisses A;

Wahrscheinlichkeit $P(A)$:

Bei einem Laplace-Experiment gilt

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\textit{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\textit{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Gegenereignis:

$\overline{A} = \Omega \setminus A$ **;** $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

Ω mit $P(\Omega) = 1$ heißt auch **sicheres Ereignis**; $\{\}$ mit $P(\{\}) = 0$ heißt auch **unmögliches Ereignis**.

Würfeln (mit idealem Würfel):

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ *oder*

$\Omega = \{$ *gerade Zahl* ; *ungerade Zahl* $\}$ *oder …*

A: „gerade Zahl"; $A = \{2; 4; 6\}$; $|A| = 3$

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\,\%$

$\overline{A}$ *: „ungerade Zahl";* $\overline{A} = \{1; 3; 5\}$

$P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{2} = 50\,\%$

C: „Augenzahl größer oder gleich eins"; $C = \Omega$

D: „Augenzahl größer als sechs"; $D = \{\}$

Viermaliges Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne, die vier nummerierte Kugeln $\{1; 2; 3; 4\}$ *enthält:*

$\Omega = \{(1/1/1/1), (1/1/1/2), \ldots, (4/4/4/3), (4/4/4/4)\}$

$|\Omega| = 4^4 = 256$

B: „Man zieht vier verschiedene Ziffern nacheinander."

$B = \{(1/2/3/4), (1/2/4/3), (1/3/2/4), \ldots, (4/3/2/1)\}$

$|B| = 24$

$P(B) = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4} = \frac{24}{256} = \frac{3}{32} \approx 9{,}4\,\%$

$\overline{B}$ *:"Man zieht nicht vier verschiedene Ziffern."*

$P(\overline{B}) = 1 - \frac{3}{32} = \frac{29}{32} \approx 90{,}6\,\%$

7. Bruchterme und Bruchgleichungen	
Bruchterme: § Faktorisieren und Kürzen § Addieren und Subtrahieren § Multiplizieren und Dividieren	*Vereinfache so weit wie möglich:* $\frac{2-2x}{(x+2)\cdot(x-1)} = \dots \left[\rightarrow \frac{-2}{x+2}\right]$ $\frac{3x}{2x-4} - \frac{x-2}{6-3x} = \dots \left[\rightarrow \frac{4-11x}{12-6x}\right]$ $\frac{2x-6}{x+1}\cdot\frac{-x}{x-3} = \dots \left[\rightarrow \frac{-2x}{x+1}\right]$
Negative Exponenten: $a \in \mathbb{Q},\ p,q \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\ \text{Faktoren}}$ für $n \ge 2$ $a^1 = a$; $a^0 = 1$ für $a \ne 0$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für $n \ge 1$; $a \ne 0$ $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$; $a^p : a^q = a^{p-q}$	*Schreibe dezimal:* $7 \cdot 10^6 = \dots$ [$\rightarrow$ 7 000 000] $4{,}19 \cdot 10^{-7} = \dots$ [$\rightarrow$ 0,000 000 419] *Berechne:* $(-5)^3 = \dots$ [$\rightarrow$ -125] $5^{-3} = \dots$ [$\rightarrow$ $\frac{1}{125}$] $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \dots$ [$\rightarrow$ $\frac{16}{9}$] *Vereinfache:* $a^{-7} \cdot a^4 = \dots$ [$\rightarrow$ a^{-3}] $a^6 : a^{-4} = \dots$ [$\rightarrow$ a^{10}]
Bruchgleichungen: o Bestimmung der Definitionsmenge D o Überführung in nennerfreie Gleichungen durch Multiplikation mit dem Hauptnenner o Auflösen nach der Lösungsvariablen und Überprüfung der Zulässigkeit § Berechnung des Schnittpunkts zweier gebrochen-rationaler Funktionen § Umsetzung einer Textaufgabe in eine Bruchgleichung und deren Lösung	*Bestimme die Definitionsmenge und löse die Bruchgleichung:* *a)* $\frac{3}{x} = \frac{4}{x-1}$ [$\rightarrow$ $D = \mathbb{Q} \setminus \{0;1\}$, $x = -3$, $L = \{-3\}$] *b)* $\frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{1}{x-1}$ [$\rightarrow$ $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1;0;1\}$, $x = 1$, $L = \{\}$] *Löse die Gleichung* $\frac{ax}{4-a} = 1$ *nach a bzw. x auf.* [$\rightarrow$ $x = \frac{4-a}{a}$, $a = \frac{4}{x+1}$ *für* $a \ne 0$; $x \ne -1$] *Über eine Röhre füllt man einen Tank in exakt 48 Minuten, eine andere Röhre braucht 50 % länger. Wie lange brauchen beide zusammen?* [$\rightarrow$ 28,8 Minuten]
8. Ähnlichkeit	
Zentrische Streckung Bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckzentrum Z, dem Streckfaktor k, Punkt P und Bildpunkt P' gilt: - Z, P und P' liegen auf einer Geraden - $\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$ (für $k > 1$: Vergrößerung, für $0 < k < 1$: Verkleinerung)	*Ein Dreieck* ΔABC *mit* $a = 5\,cm$, $b = 7\,cm$ *und* $c = 4\,cm$ *wird durch eine zentrische Streckung in ein Dreieck* $\Delta A'B'C'$ *mit* $c' = 3\,cm$ *übergeführt.* *a) Bestimme den Streckfaktor* k. [$\rightarrow$ $k = \frac{3}{4}$] *b) Berechne die Seitenlängen* a' *und* b'. [$\rightarrow$ $a' = 3{,}75\,cm$, $b' = 5{,}25\,cm$]

<table>
<tr>
<td>

Strahlensatz

Werden zwei Geraden mit dem Schnittpunkt Z von zwei Parallelen geschnitten, so gilt:

1. Strahlensatz:

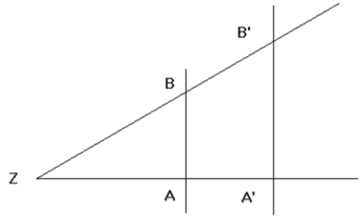
$$\overline{ZA} : \overline{ZA'} = \overline{ZB} : \overline{ZB'}$$

bzw. $\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$

2. Strahlensatz:

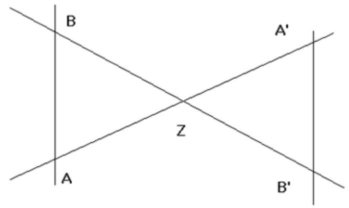
$$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{ZA} : \overline{ZA'} = \overline{ZB} : \overline{ZB'}$$

</td>
<td>



Bestimme $\overline{ZB}$, *wenn* $\overline{ZA} = 6\,cm$, $\overline{ZA'} = 8\,cm$ *und* $\overline{BB'} = 3\,cm$.

[$\rightarrow$ $\overline{ZB} = 9\,cm$]



Bestimme $\overline{AB}$, *wenn* $\overline{ZA} = 4\,cm$, $\overline{ZA'} = 5\,cm$ *und* $\overline{A'B'} = 7\,cm$.

[$\rightarrow$ $\overline{AB} = 5{,}6\,cm$]

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Ähnliche Figuren (F ~ G):

Zwei Figuren F und G heißen ähnlich, wenn sie in entsprechenden Winkeln und entsprechenden Seitenverhältnissen übereinstimmen:

$a' : a = b' : b = c' : c = \ldots = k$

$\alpha' = \alpha$; $\beta' = \beta$; $\gamma' = \gamma$; ...

$A_G = k^2 \cdot A_F$

</td>
<td>

Ein Dreieck mit den Seitenlängen $2\,cm$, $7\,cm$, $6\,cm$ *und dem Flächeninhalt* $A = 5{,}6\,cm^2$ *ist zu einem Dreieck mit den Seitenlängen* $5\,cm$ *und* $15\,cm$ *ähnlich.*

Berechne die dritte Seitenlänge, den Streckfaktor k *sowie den Flächeninhalt* A'.

[$\rightarrow$ $17{,}5\,cm$; $k = 2{,}5$; $A' = 35\,cm^2$]

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Zwei Dreiecke sind bereits dann ähnlich, wenn sie

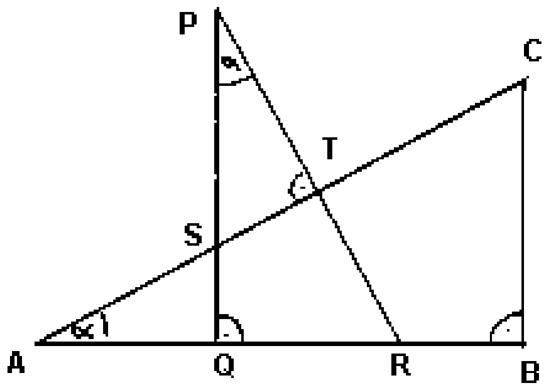
§ in zwei Winkeln übereinstimmen *oder*

§ in einem Winkel übereinstimmen und im Verhältnis der anliegenden Seiten *oder*

§ im Verhältnis ihrer 3 Seiten übereinstimmen ($a:b:c = a':b':c'$) *oder*

§ im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.

</td>
<td>



Zeige, dass $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PTS \sim \Delta\, PQR \sim \Delta\, AQS \sim \Delta\, ATR$.

</td>
</tr>
</table>